Ueber

Transversalschwingungen von Röhren.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hoher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht von

Wilhelm Elsässer
aus Lennep.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1886.

Seinem hochgeschätzten Lehrer

Herrn Provinzial-Schulrat E. Gruhl

in dankbarer Verehrung

gewidmet

vom Verfasser.

Die vorliegende Arbeit wurde angefertigt im Anschluss an Untersuchungen rein experimentellen Charakters von L. Heuser (Über Querschwingungen von Röhren, Inaug.-Diss. Marburg 1884). Es war mir eine interessante Aufgabe, auch nach der theoretischen Seite hin die Gesetze zu verfolgen, welche für Schwingungen von Röhren massgebend sind, und habe ich mir insbesondere die Aufstellung der Formeln für die Schwingungszahlen angelegen sein lassen. Die Röhren finden in der Akustik eine so ausgedehnte Anwendung und bieten oft den Stäben gegenüber solche Vorteile in der Bequemlichkeit der Handhabung, dass mir eine Feststellung der Tonhöhenformeln als wünschenswert und dienlich erschien. Die theoretische Untersuchung der Röhrenschwingungen schliesst sich eng an die der Stäbe an; nachdem in Bezug auf letztere einige der bedeutendsten Mathematiker und Physiker*) sich mit der Erforschung der hierbei auftretenden Verhältnisse beschäftigt, und insbesondere durch des jüngeren Seebeck hervorragende Abhandlung die Stabschwingungen die eingehendste Erörterung erfahren, waren auch für die Röhren die massgebenden Principien der theoretischen Untersuchung gegeben. Bezüglich der Röhren im Speziellen ist mir ausser der erwähnten auf experimentelle Basis gegründeten Abhandlung von L. Heuser nichts Näheres bekannt geworden. Die Arbeit von Seebeck[8]) sowie Rayleighs[12]) elegante Behand-

*1) D. Bernoulli, Comment. Acad. Petrop. Bd. XIII. »De vibrationibus et sono laminarum elasticarum«.

2) L. Euler, Acta Acad. Scient. Imp. Petrop. p. anno 1779. I. 103.

3) Riccati, Mém. di matem. e fisica d. Soc. Ital. Bd. I. »Delle vibratione sonore dei cylindri«

4) Chladni, »Entdeckungen über die Theorie des Klanges«.

5) Poisson, Mém. de l'Académie. 1828. VIII.

6) Canchy, Exerc. de Mathém. III. 270.

7) Strehlke, Pogg. Ann. XXVII. 505. »Über die Lage der Schwingungsknoten auf elast. geraden Stäben, welche transversal schwingen, wenn beide Enden frei sind«.

8) Seebeck, Berichte der Math. Phys. Klasse der Königl. Gesellschaft der Wissensch. I. »Über die Querschwingungen gespannter und nicht gespannter Stäbe«.

9) Lissajous, Ann. de chim. et de phys. 3ème. Série. T. XXX. 385. »Mémoire sur la position des noeuds dans les lames qui vibrent transversalement«.

10) Zöppritz, »Theorie der Querschwingungen schwerer Stäbe«. Pogg. Ann. CXXVIII.

11) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper.

12) I. W. Strutt, Baron Rayleigh, »die Theorie des Schalles«, übersetzt von Neesen.

lungsweise in seiner »Theorie des Schalles« haben mir bei der vorliegenden Untersuchung als Grundlage gedient. Weitere leitende Gesichtspunkte boten für mich die von Herrn Professor Dr. Melde in seiner »Akustik« (pag. 151, 152) angeregten Fragen, in wie weit sich die Verhältnisse umgestalten, wenn Röhren in Betracht gezogen werden, die mit Flüssigkeiten oder festen Körpern ausgefüllt sind; ihre Behandlung erwies sich als der Theorie leicht zugänglich. In den Fällen, wo eine experimentelle Untersuchung noch nicht vorlag, habe ich durch angestellte Versuche die Übereinstimmung der theoretisch gefundenen Resultate mit der Erfahrung darzuthun versucht.

Die Theorie der Röhrenschwingungen ist in den Principien im Wesentlichen nicht verschieden von der Theorie der Schwingungen der Stäbe; wir wollen daher aus der letzteren einiges vorausschicken, um zugleich den Zusammenhang der beiden Probleme zu verdeutlichen.

Die Annahme, auf welche sich die theoretische Behandlung der Stabschwingungen stützt, ist die, dass die Querschnitte, welche vor der Biegung normal zur Stabaxe waren, auch nach der Biegung eben und normal zu der gebogenen Axe bleiben. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir ferner an, dass die Biegung in einer Ebene vor sich gehe. Wir betrachten unter diesen Voraussetzungen einen cylindrischen oder prismatischen Stab von der Länge l mit vorläufig noch beliebigem Querschnitt q, von welchem eine Hauptaxe in der Biegungsebene liegen soll. Die Verbindungslinie der Schwerpunkte der einzelnen Querschnitte bildet die Axe des Stabes und wird als X-Axe den weiteren Betrachtungen zu Grunde gelegt. Die Biegung erfolgt, wie schon erwähnt, in der Richtung einer Hauptaxe des Querschnitts, welche Richtung zugleich als Y-Axe festgesetzt wird; y deutet dann die seitliche Verschiebung des Punktes der Axe an, dessen Abcisse x ist.

Der Stab werde jetzt durch irgend welche Kräfte aus seiner Gleichgewichtslage gebogen, so wird es eine Linie oder Ebene geben, deren Spannung infolge der Biegung keine Änderung erfahren hat. Diese Linie fällt mit der Schwerpunktslinie oder der Axe des Stabes zusammen, und die durch dieselbe senkrecht zur Biegungsebene gelegte Ebene verbindet die Punkte ohne Längsspannung [1]), vorausgesetzt, dass der Stab völlig homogen ist. Auf der einen Seite der Axe werden die Längsfasern infolge der Biegung ausgedehnt, während auf der anderen Seite eine ebensolche Zusammenziehung stattfindet.

Aus der über die Querschnitte gemachten Annahme folgt, dass sich zwei benachbarte Querschnitte im Krümmungsmittelpunkte der gebogenen Axe schneiden müssen. Es sei q der Flächeninhalt eines Querschnitts, R der variirende Krümmungsradius, ds ein Linienelement und dq ein Flächenelement des Querschnitts q. Die Ebene der X-Y werde als Biegungsebene festgesetzt; denken wir uns dann die Längsfaser eines Querschnittselements dq auf die Biegungsebene projicirt und bezeichnen den Abstand einer solchen Projektion von der Axe mit ω, dann wird durch die Biegung die Länge der Faser geändert in dem Verhältnis

$$\frac{1}{1+\frac{\omega}{R}}, \qquad \text{(Fig. 1)}$$

1) Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. 1862.

denn es ist, wenn wir das Längenelement der geänderten Faser mit ds' bezeichnen:

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{R + \omega}{R} = 1 + \frac{\omega}{R}$$

Die Längeneinheit der Faser hat also eine Verlängerung $\frac{\omega}{R}$ erfahren. Durch diese Verlängerung wird eine elastische Kraft hervorgerufen, die gleich

$$E \cdot \frac{\omega}{R} \cdot dq$$

ist, wo E den Elasticitäts-Coeffizienten bedeutet. Auf den Querschnitt wird infolge dessen ein Drehungsmoment ausgeübt

$$E \cdot \frac{\omega}{R} \cdot dq \cdot \omega.$$

Dies bezieht sich auf ein Querschnittselement, daher ist das gesammte auf den Querschnitt ausgeübte Drehungsmoment:

$$\int E \cdot \frac{\omega}{R} \cdot dq \cdot \omega = \frac{E}{R} \int \omega^2 \, dq,$$

wobei sich die Integration auf den ganzen Querschnitt bezieht; R ist in Bezug auf diese Integration constant und kann daher vor das Integralzeichen gesetzt werden. Bezeichnen wir den Wert von $\int \omega^2 \, dq$ für den ganzen Querschnitt mit K, wo ω in Bezug auf eine zur Biegungsebene senkrechte Axe genommen ist, so ist das Gesammtdrehungsmoment für den Querschnitt q gleich

$$\frac{E}{R} \cdot K.$$

Der Winkel, um den zwei benachbarte Querschnitte gedreht sind, ist $\frac{ds}{R}$, daher ist die Arbeit, welche zur Hervorbringung dieser Drehung aufgewandt wird:

$$\int \frac{1}{2} E \cdot \frac{\omega}{R} \cdot dq \cdot \omega \cdot \frac{ds}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{E}{R^2} \cdot K \cdot ds$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ tritt hier hinzu, weil für den Weg $\omega \cdot \frac{ds}{R}$ der Mittelwert der Kraft genommen werden muss, deren grösster Wert $E \cdot \frac{\omega}{R} dq$ und deren kleinster Wert Null ist. Daher ist die Gesammtarbeit, welche bei der Biegung des ganzen Stabes aufgewandt wird

$$V = \frac{1}{2} E \cdot K \cdot \int \frac{ds}{R^2}$$

Der Faktor K kann vor das Integralzeichen treten, da in Bezug auf s K constant ist, weil wir cylindrische oder prismatische Stäbe voraussetzen. Die Integration erstreckt sich über die ganze Länge des Stabes.

Ist die seitliche Verschiebung eine sehr geringe, so dürfen wir dx statt ds setzen, und es wird dann die Krümmung

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{d x^2}$$

also infolge dessen

$$V = \frac{1}{2} E . K . \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right)^2 ds$$

Dieser Ausdruck stellt die potentielle Energie der Biegung dar, d. h. die bei der Biegung durch die inneren Kräfte geleistete Arbeit, welche wieder gewonnen werden kann, wenn der gebogene Stab in die Ruhelage zurückkehrt.

Die kinetische Energie der Bewegung für das Stabelement $q . dx$ ist

$$d T = \frac{1}{2} \varrho . q . dx . \left(\frac{d y}{d t} \right)^2$$

Daher ist die Gesammtenergie

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \varrho . q . \left(\frac{d y}{d t} \right)^2 dx$$

wenn ϱ die Dichte des Stabes bezeichnet.

Wir wollen nach diesen Vorausschickungen zu unserem eigentlichen Problem, den Transversalschwingungen von Röhren, übergehen, und können uns dabei auf das Vorangehende beziehen.

Wir setzen eine prismatische oder cylindrische Röhre voraus mit parallelen, resp. concentrischen Wänden, und es soll der Schwerpunkt des Querschnitts mit dem Schwerpunkt des Querschnitts eines massiven Stabes von denselben äusseren Dimensionen zusammenfallen. Die Verbindungslinie der Schwerpunkte bilde die Axe der Röhre und werde als Axe der X genommen. In derselben Weise wie bei Stäben wird auch hier die durch die Schwerpunktslinie senkrecht zur Biegungsebene gelegte Ebene die Punkte ohne Längsspannung verbinden, wenn auch hier der Axe keine Punkte der Röhre entsprechen und dieselbe nur in ideeller Weise als Linie angesehen werden kann, welche Punkte der Röhre ohne Längsspannung verbindet. Dennoch wird auf der einen Seite der Axe, resp. der durch sie gelegten Ebene eine Verlängerung, auf der anderen Seite eine Verkürzung der Längsfasern stattfinden. Die Biegungsverhältnisse bleiben überhaupt dieselben, wie bei den Stäben, das auf den ganzen Querschnitt ausgeübte Drehungsmoment wird dargestellt durch den Ausdruck

$$\frac{E}{R} \int \omega^2 \, dq = \frac{E}{R} . K$$

Der Wert von K ist natürlich hier ein anderer wie bei den Stäben und muss für jeden Querschnitt besonders berechnet werden.

Für den kreisförmigen und rektangulären Querschnitt berechnet sich der Wert von K folgendermassen:

I. Kreisförmiger Querschnitt (Fig. 2).

Ist M der Mittel- und Schwerpunkt des Querschnitts der Röhre mit den Radien r_1 und r_2, so legen wir durch M eine Axe ML senkrecht zur Biegungsebene; diese Axe sei zugleich die Polaraxe eines Polarcoordinatensystems, dessen Anfangspunkt M ist.

Bezeichnet r den Radius Vector, ϑ den Polarwinkel des Systems, so wird die Entfernung ω eines Punktes von der Axe ML ausgedrückt durch

$$\omega = r \,.\, sin\,\vartheta$$

Ferner wird in diesem System ein Flächenelement dq ausgedrückt durch

$$dq = r \,.\, dr \,.\, d\vartheta$$

Demnach wird

$$\int \omega^2 dq = \int\int r^3 sin^2\,\vartheta \, dr \, d\vartheta$$

Wir haben über den ganzen Querschnitt zu integriren, daher läuft r von r_2 bis r_1, ϑ von Null bis 2π, es wird also

$$K = \int_{r_2}^{r_1}\int_{0}^{2\pi} r^3 sin^2\,\vartheta \, dr \,.\, d\vartheta$$

$$= \frac{r_1^4 - r_2^4}{4} \cdot \int_0^{2\pi} sin^2\,\vartheta \,.\, d\vartheta$$

Es ist aber

$$\int sin^2\,\vartheta \, d\vartheta = -\, sin\,\vartheta \, cos\,\vartheta + \int cos^2\,\vartheta \, d\vartheta$$

$$= -\, sin\,\vartheta \, cos\,\vartheta + \vartheta - \int sin^2\,\vartheta \, d\vartheta$$

$$\int sin^2\,\vartheta \, d\vartheta = \left[\frac{-\, sin\,\vartheta \, cos\,\vartheta + \vartheta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi$$

Daher

$$K = \frac{r_1^4 - r_2^4}{4} \,.\, \pi$$

II. Rektangulärer Querschnitt (Fig. 3).

Wir legen auch hier durch den Mittel- und Schwerpunkt M des Querschnitts mit den Seiten a_1, b_1 und a_2, b_2 eine Axe ML senkrecht zur Biegungsebene, diese sei zugleich die X-Axe des ebenen rechtwinkligen Coordinaten-Systems, dessen Anfangspunkt in M liege. Dann wird ein Flächenelement dq ausgedrückt durch $dx \,.\, dy$, die Entfernung ω eines Punktes von der X-Axe durch y, also wird

$$\omega^2 \, dq = y^2 \, dx \,.\, dy$$

$$\int \omega^2 \, dq = \int\int y^2 \, dx \, dy$$

Wir haben hier über die ganze Fläche zu integriren, daher wird

$$K = \int_{-\frac{a_1}{2}}^{+\frac{a_1}{2}} \int_{-\frac{b_1}{2}}^{+\frac{b_1}{2}} y^2 \, dx \, dy - \int_{-\frac{a_2}{2}}^{+\frac{a_2}{2}} \int_{-\frac{b_2}{2}}^{+\frac{b_2}{2}} y^2 \, dx \, dy$$

$$K = \frac{b_1^3 a_1 - b_2^3 a_2}{12}$$

Sind innere und äussere Begrenzung Quadrate mit den Seiten b_1 und b_2, so wird

$$K = \frac{b_1^4 - b_2^4}{12}$$

Für die Röhre wird die potentielle Energie der Biegung dargestellt durch

$$V = \frac{E}{2} . K . \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2 dx$$

wenn der Coordinaten-Anfangspunkt an das eine Ende der Röhre gelegt wird.

Die kinetische Energie der Bewegung ist

$$T = \frac{1}{2} \int \varrho . q . \left(\frac{d y}{d t}\right)^2 dx.$$

Die Bewegungsgleichung bildet sich nunmehr sehr einfach nach dem d'Alembert'schen Princip in Verbindung mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Die Röhre sei in Bewegung und es mögen keine äusseren Kräfte auf sie wirken. Für eine willkürliche kleine Änderung δy von y wird

$$\delta V = \frac{E . K}{2} . 2 \int_0^l \frac{d^2 y}{d x^2} . \frac{d}{d y}\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right) \delta y . dx$$

$$= E . K . \int_0^l \frac{d^2 y}{d x^2} . \delta \frac{d^2 y}{d x^2} . dx$$

oder vermittelst der Relationen

$$\delta \frac{d y}{d x} = \frac{d \delta y}{d x}$$

$$\delta \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d^2 \delta y}{d x^2}$$

$$\delta V = E . K . \int_0^l \frac{d^2 y}{d x^2} . \frac{d^2 \delta y}{d x^2} . dx$$

$$= E . K . \left\{ \left[\frac{d^2 y}{d x^2} . \frac{d \delta y}{d x} - \frac{d^3 y}{d x^3} . \delta y \right]_0^l + \int_0^l \frac{d^4 y}{d x^4} . \delta y . dx \right\}$$

Dieser Ausdruck stellt das virtuelle Moment der inneren Kräfte für die virtuelle Verschiebung δy dar. Ferner wird das virtuelle Moment der bewegenden Kräfte:

$$\delta T = \int_0^l \varrho . q . \frac{d^2 y}{d t^2} \delta y . dx$$

Da keine äusseren Kräfte auf die Röhre wirken, so muss nach dem angeführten Princip:

$$\delta V + \delta T = 0$$

$$E.K.\left[\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{d^3y}{dx^3}.\delta y\right]_0^l+E.K\int_0^l\frac{d^4y}{dx^4}.\delta y.dx$$

$$+\varrho.q.\int_0^l\frac{d^2y}{dt^2}\delta y\,dx=0$$

$$EK\left[\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{d^3y}{dx^3}.\delta y\right]_0^l+\int_0^l\left(EK\frac{d^4y}{dx^4}+\varrho q\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y.dx=0$$

Hieraus folgt, dass für alle Punkte der Röhre die Bedingung erfüllt sein muss

$$EK\frac{d^4y}{dx^4}+\varrho q\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

Diese Gleichung bildet die Bewegungsgleichung der Röhre. Für jedes Ende der Röhre ergeben sich die Bedingungen:

$$EK\left(\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{d^3y}{dx^3}.\delta y\right)_{(l)}=0$$

$$EK\left(\frac{d^2y}{dx^2}.\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{d^3y}{dx^3}.\delta y\right)_{(0)}=0$$

Setzen wir $\frac{E.K}{\varrho.q}=b^2$, so wird die Bewegungsgleichung

$$b^2\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

Wir machen nunmehr die Annahme, dass die Bewegungen der Röhre in periodischen Schwingungen bestehen. Da sich letztere stets auf einen Ausdruck von der Form $A.\sin nt$ zurückführen lassen, so setzen wir

$$y=C.u.\sin\left(\frac{b}{l^2}.m^2.t\right)$$

wo C eine unbestimmte Constante, u eine Funktion von x, und m eine später noch zu bestimmende Zahl bedeutet. Unter dieser Voraussetzung wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^4u}{dx^4}=\frac{m^4}{l^4}.u$$

Diese lineare Differentialgleichung wird gelöst, indem man bekannter Weise $u=e^{px}$ setzt, es ist dann e^{px} ein particuläres Integral der Differentialgleichung, wenn p der Bedingung genügt

$$p^4=\frac{m^4}{l^4}$$

Die 4 Wurzeln dieser Gleichung

$$+\frac{m}{l}\;-\frac{m}{l}+i\frac{m}{l}\;-i\frac{m}{l}$$

bilden also die für p zulässigen Werte, und es werden $e^{\frac{m}{l}x}$, $e^{-\frac{m}{l}x}$, $e^{i\frac{m}{l}x}$, $e^{-i\frac{m}{l}x}$ vier particuläre Integrale sein. Das allgemeine Integral wird dargestellt durch

$$\text{I.} \quad u = A \cdot e^{\frac{m}{l}x} + B \cdot e^{-\frac{m}{l}x} + C \cos \frac{m}{l} x + D \cdot \sin \frac{m}{l} x$$

wo A, B, C, D willkürliche Constanten bedeuten, welche zusammen mit m aus den Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden müssen. Diese Bedingungen bestehen in den Annahmen über die Enden der Röhre. Jedes Ende hat, wie wir gefunden, der Bedingung zu genügen:

$$E \cdot K \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) - \frac{d^3 y}{dx^3} \cdot \delta y \right) = 0$$

welche sich je nach der Annahme in besonderer Weise umgestaltet. Das Ende der Röhre kann nämlich entweder frei, angestemmt, oder fest sein. Im ersteren Falle ist δy, ebenso $\delta \frac{dy}{dx}$ für das fragliche Ende völlig willkürlich, daher muss für ein freies Ende:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$$

Ist das Ende festgestemmt, so ist es hierdurch gezwungen, in Ruhe zu bleiben, während die Richtung an dem Ende willkürlich ist. Daher werden die Bedingungen für ein angestemmtes Ende:

$$\delta y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Ein Ende ist fest, wenn dasselbe gezwungen ist, in Ruhe zu bleiben und ausserdem die Richtung am Ende durch ein hier zu denkendes Kräftepaar gebunden wird. Die Bedingungen für ein festes Ende werden demnach

$$\delta \frac{dy}{dx} = 0, \quad \delta y = 0$$

Aus diesen Bedingungen bestimmen sich A, B, C, D und m. Jedem sich ergebenden Werte von m entspricht ein besonderer Wert von u, der mit Ausnahme eines constanten Faktors vollkommen bestimmt ist. Bezeichnen wir die einzelnen Werte von u mit u_1, $u_2 \ldots$, so erscheint jeder Wert von u im allgemeinsten Falle multiplizirt mit einem Faktor $\left(A_\nu \cdot \cos \frac{b}{l^2} m_\nu^2 \cdot t + B_\nu \cdot \sin \frac{b}{l^2} m_\nu^2 \cdot t \right)$, wo A_ν und B_ν sich aus gegebenen Bedingungen bestimmen. Bezeichnen wir einen solchen Faktor mit φ, so stellen

$$y_1 = \varphi_1 \cdot u_1; \; y_2 = \varphi_2 \cdot u_2, \ldots$$

die einzelnen Schwingungstypen dar, welche die Röhre zu liefern im Stande ist. Der allgemeinste Wert von y wird also dargestellt durch

$$y = \Sigma \varphi \cdot u$$

$$y = \left(A_1 \cos \frac{b}{l^2} m_1^2 \cdot t + B_1 \cdot \sin \frac{b}{l^2} m_1^2 \, t \right) u_1 +$$

$$\left(A_2 \cos \frac{b}{l^2} m_2^2 \cdot t + B_2 \cdot \sin \frac{b}{l^2} m_2^2 \, t \right) u_2 +$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Soll für $t = 0$ die Röhre in der Ruhelage sein, d. h. $y = 0$, so müssen die Coefficienten A zu Null werden, da die *cos* verschwinden müssen. Es wird unter dieser Voraussetzung

$$y = B_1 \sin \frac{b}{l^2} m_1^2 \, t \, . \, u_1 + B_2 \, . \sin \frac{b}{l^2} m_2^2 \, t \, . \, u_2 + \ldots$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \frac{b}{l^2} m_1^2 \, B_1 u_1 + \frac{b}{l^2} m_2^2 \, B_2 u_2 + \ldots$$

Multipliziren wir diese Gleichung mit $u_\nu \, dx$ und integriren, so folgt

$$\text{(a)} \quad \int_0^l \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 u_\nu \, . \, dx = \frac{b \, . \, m_\nu^2}{l^2} \, . \, B_\nu \, . \int_0^l u_\nu^2 \, dx$$

Alle Integrale von der Form $\int u_m \, . \, u_{m1} \, dx$ fallen fort, denn

$$1) \quad \frac{d^4 u_m}{dx^4} = \frac{m^4}{l^4} \, . \, u_m$$

$$2) \quad \frac{d^4 u_{m1}}{dx^4} = \frac{m_1^4}{l^4} \, . \, u_{m1}$$

Indem wir 1) mit $u_{m1} \, . \, dx$ und 2) mit $u_m \, . \, dx$ multipliziren, und über die ganze Länge der Röhre integriren, folgt

$$\frac{m_1^4 - m^4}{l^4} \int_0^l u_m \, . \, u_{m1} \, . \, dx = \int_0^l \frac{d^4 u_{m1}}{dx^4} \, . \, u_m \, dx - \int_0^l \frac{d^4 u_m}{dx^4} \, . \, u_{m1} \, dx$$

$$= u_m \, . \, \frac{d^3 u_{m1}}{dx^3} - \frac{d^2 u_{m1}}{dx^2} \, . \, \frac{du_m}{dx} + \int \frac{d^2 u_{m1}}{dx^2} \, . \, \frac{d^2 u_m}{dx^2} \, dx + \frac{d^2 u_m}{dx^2} \, . \, \frac{d^2 u_{m1}}{dx^2} - \int \frac{d^2 u_{m1}}{dx^2} \, . \, \frac{d^2 u_m}{dx^2} \, dx$$

$$= u_m \, . \, \frac{d^3 u_{m1}}{dx^3} - u_{m1} \frac{d^3 u_m}{dx^3} - \frac{d^2 u_{m1}}{dx^2} \, . \, \frac{du_m}{dx} + \frac{d^2 u_m}{dx^2} \, . \, \frac{du_{m1}}{dx}$$

Jedes der Glieder auf der rechten Seite verschwindet, ob das Ende der Röhre frei oder fest oder angestemmt ist. Also

$$\int u_m \, . \, u_{m1} \, . \, dx = 0.$$

Aus Gleichung (a) folgt nun

$$B_\nu = \frac{l^2}{b \, . \, m_\nu^2} \, . \, \frac{\int_0^l \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \, . \, u_\nu \, dx}{\int_0^l u_\nu^2 \, dx}$$

$$= \frac{l^2}{b \, . \, m_\nu^2 \, . \int_0^l u_\nu^2 \, dx} \, . \int_0^l v_0 \, . \, u_\nu \, . \, dx$$

Diese Gleichungen können zur Bestimmung der Constanten B dienen, wenn z. B. die Bewegungsgrösse gegeben ist, welche der Röhre an einem bestimmten Punkte mitgeteilt wird, um sie in Schwingungen zu versetzen. In anderer Weise liessen sich diese Constanten auch aus der Bedingung bestimmen, dass die Amplitude für das eine Ende der Röhre einen vorgeschriebenen Wert haben soll. Soll also z. B. für die einfache Bewegung des Typus u_ν die Amplitude für das Ende $x = l$ den Wert a haben, so wird

$$a = B_\nu . u_\nu (l)$$

$$B_\nu = \frac{a}{u_\nu (l)}$$

Wir haben in dem Vorigen die Kenntnis von u und m vorausgesetzt, diese beiden Grössen müssen noch bestimmt werden, und wir haben zu diesem Zweck je nach den Endbedingungen besondere Wege einzuschlagen. Zur Kenntnis von u ist die Bestimmung der Constanten A, B, C, D von Gleichung I. erforderlich. Die Entwickelung ist die gleiche wie bei den Stäben.

I. Fall.

Ein Ende fest, das andere frei.

Wir wollen das freie Ende als Anfangspunkt der X-Axe nehmen.
Die Bedingungen für ein freies Ende lauten in diesem Falle:

$$\frac{d^2 u}{d x^2} = 0, \quad \frac{d^3 u}{d x^3} = 0$$

Die Bedingungen für das feste Ende $x = l$ lauten dann

$$u = 0, \quad \frac{d u}{d x} = 0$$

da

$$u = A . e^{\frac{m}{l} x} + B . e^{-\frac{m}{l} x} + C . \sin \frac{m}{l} x + D . \cos \frac{m}{l} x,$$

so wird vermöge der Bedingungen am freien Ende $x = 0$

$$1) \quad A + B - D = 0$$
$$2) \quad A - B - C = 0$$

und vermöge der Endbedingungen am Ende $x = l$:

$$3) \quad A . e^m + B . e^{-m} + C . \sin m + D . \cos m = 0$$
$$4) \quad A . e^m - B \ e^{-m} + C . \cos m - D . \sin m = 0$$

In Bezug auf die Constanten A, B, C, D sind diese 4 Gleichungen linear und homogen, es bestimmen sich also hieraus drei derselben im Verhältnis zur vierten, und ausserdem ergiebt sich eine transcendente Gleichung für m. Aus den obigen 4 Gleichungen folgt nämlich, dass die Determinantengleichung befriedigt werden muss:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ e^m & e^{-m} & \sin m & \cos m \\ e^m & -e^{-m} & \cos m & -\sin m \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$4 + 2 \cdot e^{-m} \cdot \cos m + 2 \cdot e^{m} \cdot \cos m = 0$$

$$2 + (e^{-m} + e^{m}) \cos m = 0$$

$$(5) \quad \cos m = -\frac{2}{e^m + e^{-m}}$$

Man sieht, dass diese Entwickelung sich in keiner Weise von dem Falle der Stäbe unterscheidet, wir erhalten dieselbe Gleichung zur Bestimmung der Zahl m, und es folgt also zunächst, dass der Wert von m derselbe ist wie bei den Stäben. Die Auflösung der transcendenten Gleichung (5) kann nach Seebeck durch Näherungsmethoden auf die Weise gefunden werden, dass zunächst die Division in Gl. (5) ausgeführt wird; man erhält

$$6) \quad \cos m = -2\,(e^{-m} - e^{-3m} + e^{-5m} \ldots)$$

Der *cos* ist negativ, also können die zulässigen Werte von m nur im 2. und 3., im 6. u. 7., etc. Quadranten liegen. Berücksichtigt man dies, so kann man für die höheren Töne, da e^{-m} für grössere m sehr klein wird, $m = \frac{2i-1}{2} \cdot \pi$ setzen; die Abweichungen von diesem Werte sind um so geringer, je grösser m. Um den ersten Wert von m zu finden, schreibt man, da $\cos m = \frac{e^{im} + e^{-im}}{2}$, die Gl. 5) folgendermassen:

$$-1 = \frac{e^m + e^{-m}}{2} \cdot \frac{e^{im} + e^{-im}}{2}, \text{ wo } i = \sqrt{-1}$$

oder, wenn man die rechte Seite in eine Reihe nach steigenden Potenzen von m entwickelt:

$$-1 = 1 - \frac{4 \cdot m^4}{4!} + \frac{16 \cdot m^8}{8!} - \frac{64 \cdot m^{12}}{12!} + \ldots$$

Da diese Reihe schnell convergirt, so dürfen wir vorläufig die Glieder von der 12. Potenz von m ab vernachlässigen. Aus der so entstandenen quadratischen Gleichung für m^4 erhalten wir dann für den kleinsten Wert von m den ersten Näherungswert 1,8752. Dieser Wert wird zur genaueren Berechnung in Gl. 6) eingesetzt, und man erhält auf diese Weise einen weiteren Näherungswert, welcher wiederum in Gl. 6) eingesetzt zur Berechnung eines noch genaueren Wertes dienen kann. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man eine beliebig grosse Genauigkeit erzielen. Man erhält so für den ersten Wert von m:

$$m_1 = 1{,}87510 = 0{,}59686 \cdot \pi$$

Für die weiteren Werte von m benutzt man als ersten Näherungswert $\frac{2i-1}{2} \cdot \pi$, berechnet aus Gl. 6) den genaueren Wert und bedient sich im Übrigen desselben Verfahrens wie vorhin. Man erhält auf diese Weise

$$m_1 = 1{,}87510 = 0{,}59686 \,.\, \pi$$
$$m_2 = 4{,}69474 = 1{,}49418 \,.\, \pi$$
$$m_3 = 7{,}85476 = 2{,}50025 \,.\, \pi$$
$$\vdots$$
$$m_i = \qquad = \frac{2i-1}{2} \,.\, \pi$$

Bezeichnet man den Faktor von π mit ε_i, so ist

$$m_i = \varepsilon_i \,.\, \pi$$

Wir können jetzt zur Berechnung der Tonhöhe schreiten. Nachdem ε_i bestimmt ist, sind hierzu alle Grössen gegeben. Die Periode τ der Schwingung ist bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{b}{l^2} \,.\, m_i^2 = \frac{2\pi}{\tau}$$

Hieraus folgt für die Schwingungszahl $N = \frac{1}{\tau}$

$$N = \frac{b}{2\pi l^2} \,.\, m_i^2$$
$$= \frac{\varepsilon_i^2 \,\pi b}{2 l^2}$$

Setzen wir hierin den Wert von $b = \sqrt{\frac{E K}{\varrho \,.\, q}}$ ein, so wird

$$N = \frac{\varepsilon_i^2 \,\pi}{2 l^2} \,.\, \sqrt{\frac{E K}{\varrho q}}$$

Für einen rektangulären Querschnitt wird

$$q = a_1 b_1 - a_2 b_2$$

wenn a_1, b_1; a_2, b_2 die Seiten der beiden Rechtecke bedeuten. Für den kreisförmigen Querschnitt wird

$$q = (r_1^2 - r_2^2) \,.\, \pi$$

wo r_1 und r_2 den äusseren und inneren Radius bezeichnen.

Ferner hatten wir für den rektangulären Querschnitt berechnet

$$K = \frac{a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3}{12}$$

und für den kreisförmigen Querschnitt

$$K = \frac{r_1^4 - r_2^4}{4} \,.\, \pi$$

Hiernach wird die Formel für die Schwingungszahl:

I. Für den rektangulären Querschnitt.

$$N = \frac{\varepsilon_i^2 \,.\, \pi}{2 l^2} \,.\, \sqrt{\frac{E \,.\, (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3)}{12 \,\varrho \,(a_1 b_1 - a_2 b_2)}}$$

$$N = \frac{\varepsilon_i^2 \cdot \pi}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot g}{s}} \cdot \sqrt{\frac{a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3}{a_1 b_1 - a_2 b_2}}$$

Ia. Für den quadratischen Querschnitt (b_1, b_2).

$$N = \frac{\varepsilon_i^2 \pi}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E g}{s}} \cdot \sqrt{\frac{b_1^4 - b_2^4}{b_1^2 - b_2^2}}$$

$$N = \frac{\varepsilon_i^2 \cdot \pi}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E g}{s}} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

II. Für den kreisförmigen Querschnitt.

$$N = \frac{\varepsilon_i^2 \pi}{2 l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot (r_1^4 - r_2^4)\pi}{\varrho \cdot 4 (r_1^2 - r_2^2)\pi}}$$

$$N = \frac{\varepsilon_i^2 \pi}{4 l^2} \cdot \sqrt{\frac{E g}{s}} \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

s ist das spez. Gewicht des Materials der Röhre, g die Beschleunigung durch die Schwere, so dass die Dichte $\varrho = \frac{s}{g}$.

Da, wie sich später ergibt, die Tonhöheformeln für die übrigen Fälle einen genau gleichen Bau zeigen, so habe ich mich in Bezug auf die experimentelle Prüfung auf den Fall zweier freien Enden beschränkt als den für das Experiment am leichtesten zugänglichen.

Es erübrigt nunmehr noch die Bestimmung der Constanten A, B, C, D.

Aus Gl. 5) folgt zunächst

$$\sin m_i = \sqrt{1 - \frac{4}{(e^{mi} + e^{-mi})^2}}$$

$$= \pm \frac{e^{mi} - e^{-mi}}{e^{mi} + e^{-mi}}$$

Da die Werte von m nur im 2., 3., 6., 7. . . . Quadranten liegen, (cf. pag. 12), so gilt das obere Zeichen für die ungeraden Werte von i, das untere Zeichen für die geraden Werte von i. Durch Addition von Gl. 3) und 4) folgt

$$2A \cdot e^m + C \cdot (\sin m + \cos m) + D(\cos m - \sin m) = 0$$

Mit Berücksichtigung von Gl. 1) und 2):

$$A(e^m + \cos m) = B \cdot \sin m$$

Durch Einführen der gefundenen Werte $\cos m$ und $\sin m$ in diese Gleichung folgt endlich:

$$A\left(e^m - \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right) = \pm B \cdot \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$$

$$B = \pm A \left(\frac{e^{2m} - 1}{e^m - e^{-m}}\right)$$

$$= \pm A \cdot e^m$$

Aus Gl. 1) und 2) folgt dann

$$D = A(1 \pm e^m)$$
$$C = A(1 \mp e^m)$$

so dass die Gleichung für u wird

$$u = A.\left(e^{\frac{m}{l}x} \pm e^m . e^{-\frac{m}{l}x} + (1 \pm e^m).\sin\frac{m}{l}x + (1 \pm e^m)\cos\frac{m}{l}x\right)$$

Mit Ausnahme eines constanten Faktors ist hiernach u völlig bestimmt. Es wird

$$y = \Sigma_\nu B_\nu . \sin(2\pi . N_\nu . t)\left\{e^{\frac{m_\nu}{l}x} \pm e^{m_\nu} . e^{-\frac{m_\nu}{l}x} + (1 \mp e^{m_\nu})\sin\frac{m_\nu}{l}x + (1 \pm e^{m_\nu}).\cos\frac{m_\nu}{l}x\right\}$$

Der Faktor B_ν bestimmt sich aus gegebenen Bedingungen, wie früher gezeigt wurde. Hiermit ist y für alle Punkte der Röhre als bekannt anzusehen, die Lage der Knotenpunkte, d. h. der Punkte, welche für alle Werte von t in der Ruhelage sind, ergiebt sich hieraus, wenn der von x abhängige Faktor gleich Null gesetzt wird. Man erhält

$$0 = e^{\frac{m}{l}x} + e^m . e^{-\frac{m}{l}x} + (1 \mp e^m)\sin\frac{m}{l}x + (1 \pm e^m)\cos\frac{m}{l}x$$

$$0 = e^{\frac{m}{l}x} \pm e^m . e^{-\frac{m}{l}x} + \sin\frac{m}{l}x + \cos\frac{m}{l}x \mp e^m\left(\sin\frac{m}{l}x - \cos\frac{m}{l}x\right)$$

Um hieraus x zu bestimmen, multipliziren wir die Gleichung mit $\pm e^{-m}$ und setzen zur Abkürzung

$$7) \quad \delta = \pm e^{-\left(\frac{m}{l}x + m\right)} + e^{-\frac{m}{l}x} \pm e^{-m}\left(\sin\frac{m}{l}x + \cos\frac{m}{l}x\right)$$

(Seebeck). Dann wird

$$8) \quad \sin\frac{m}{l}x - \cos\frac{m}{l}x = \delta$$

$$\sin\left(\frac{m}{l}x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$$

Mit Ausnahme für den ersten Ton, welcher keine Knoten liefert, ist e^{-m} sehr klein, ebenso $e^{-\frac{m}{l}x}$ und $e^{-\left(\frac{m}{l}x + m\right)}$ sehr klein für die Knoten, welche nicht in der Nähe der Enden liegen. Daher ist δ sehr klein, und man kann für den 2., 3., 4 . . . k. Knoten als ersten Näherungswert von $\left(\frac{m}{l}x - \frac{\pi}{4}\right)$ die Werte setzen π, 2π, $\ldots(k-1)\pi$, oder für

$$x = \frac{4k-3}{4} \cdot \frac{l}{m} . \pi$$

Dieser Wert von x wird in Gl. 7) eingesetzt, daraus δ berechnet, dann liefert Gl. 8), wenn man darin den gefundenen Wert von δ substituirt, einen genaueren Wert für x, ein Näherungsverfahren, das bis zu einem beliebigen Grade von Genauigkeit fortgesetzt werden kann. Nicht anwendbar ist es zur Berechnung der Knoten, welche dem freien Ende zunächst liegen; hier darf $e^{-\frac{m}{l}x}$ nicht als sehr klein angenommen werden, weil in der Nähe des Endes x im Verhältnis zu l sehr klein ist. Für diesen Fall dient folgendes

Verfahren zur Berechnung. Da $e^{-\left(\frac{m}{l}x+m\right)}$, desgleichen e^{-m} sehr klein sind, so setze man zunächst angenähert

$$\delta = e^{-\frac{m}{l}x}$$

Es wird dann

$$\sin\frac{m}{l}x - \cos\frac{m}{l}x = e^{-\frac{m}{l}x}$$

$$0 = e^{-\frac{m}{l}x} - \sin\frac{m}{l}x + \cos\frac{m}{l}x,$$

oder, wenn wir jedes Glied der rechten Seite nach fortlaufenden Potenzen von x entwickeln:

$$0 = 1 - \frac{m}{l}x + \frac{m^4}{l^4}\cdot\frac{x^4}{4!} - \frac{m^5}{l^5}\cdot\frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Man findet aus dieser Gleichung leicht durch Versuche, dass der kleinste Wert von x etwa 1,04 ist. Diesen Wert setzt man in die Gl. 7) ein, berechnet hieraus δ und benutzt letzteren Wert, um aus Gl. 8) einen genaueren Wert für x zu finden. Dieses Verfahren kann fortgesetzt werden.

Der Wert von m entscheidet über die Anzahl der bei einem Typus möglichen Knoten. Man findet auf die vorhin angegebene Weise folgende Bestimmungen der Knotenlagen, die Länge $l = 1$ gerechnet:

	1. Knoten	2. Kn.	3. Kn.		k. Kn.	
1. Ton	Kein Knoten					
2. Ton	0.2261					
3. Ton	0.1321	0.4999				
4. Ton	0.0944	0.3558	0.6439			
i. Ton	$\frac{1{,}3222}{4i-2}$	$\frac{4{,}982}{4i-2}$	$\frac{9{,}007}{4i-2}$		$\frac{4k-3}{4i-2}$	da $4m = (4i-2)\pi$

Wenn aus dem Vorstehenden sich ergiebt, dass die Knoten bei den Röhren an denselben Stellen liegen wie bei Stäben von gleichen äusseren Dimensionen, so hätte dies auch a priori aus der für y gefundenen Gleichung geschlossen werden können, denn der von x abhängige Faktor, welcher die Knotenlagen bestimmt, unterscheidet sich nicht von dem bei Stäben in der entsprechenden Gleichung auftretenden Ausdruck, und man hätte auch ohne die nähere Ausführung unmittelbar zu der Behauptung Berechtigung gehabt, dass in Bezug auf die Knotenlagen zwischen Röhren und Stäben keinerlei Unterschied stattfindet.

Ein Gleiches gilt für die Schwingungsbäuche, die Wendepunkte und die Punkte stärkster Biegung, deren Bestimmungsgleichungen sich in leichter Weise finden lassen,

wenn man bzw. $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}$ gleich Null setzt. Ihre Lage kann von der bei homogenen Stäben nicht verschieden sein.

II. Fall.

Beide Enden frei.

Die Bedingungen lauten, dass an beiden Enden $x=0$ und $x=l$ $\frac{d^2u}{dx^2}$ und $\frac{d^3u}{dx^3}$ verschwinden müssen. Dies gibt aus der allgemeinen Gleichung

$$u = A \cdot e^{\frac{m}{l}x} + B \cdot e^{-\frac{m}{l}x} + C \cdot \sin\frac{m}{l}x + D \cdot \cos\frac{m}{l}x$$

folgende 4 Bedingungsgleichungen

1) $A + B - D = 0$
2) $A - B - C = 0$
3) $A \cdot e^m + B \cdot e^{-m} - C \cdot \sin m - D \cdot \cos m = 0$
4) $A \cdot e^m - B \cdot e^{-m} - C \cdot \cos m + D \cdot \sin m = 0$

In Bezug auf die Constanten A, B, C, D sind dies 4 homogene Gleichungen, es muss daher folgende Determinantengleichung befriedigt werden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ e^m & e^{-m} & -\sin m & -\cos m \\ e^m & -e^{-m} & -\cos m & \sin m \end{vmatrix} = 0$$

deren Auflösung ergibt

$$4 - 2(e^{-m} + e^m)\cos m = 0$$

$$5) \quad \cos m = \frac{2}{e^m + e^{-m}}$$

demnach

$$6) \quad \sin m = \mp \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$$

Der *cos* ist positiv, also liegen die Werte von m nur im 1., 4., 5., 9. etc. Quadranten. Im ersten Quadranten liegt der Wert $m=0$, welcher keine Schwingung liefert, daher können die zulässigen Werte von m nur im 4., 5., 9. . . . Quadranten liegen. Demnach ist in der Formel für $\sin m$ das obere Zeichen für die ungeraden Werte von m zu nehmen, das untere für die geraden.

Die Werte von m berechnen sich nach Analogie der Rechnung für ein festes und freies Ende. Es ist

$$7) \quad \cos m = 2(e^{-m} - e^{-3m} + e^{-5m} \ldots)$$

Ebenso kann man Gl. 5) schreiben

$$1 = \frac{e^m + e^{-m}}{2} \cdot \frac{e^{im} + e^{-im}}{2}$$

wo die rechte Seite nach aufsteigenden Potenzen von m entwickelt, die Gleichung liefert:

$$1 = 1 - \frac{4\,m^4}{4!} + \frac{16\,m^8}{8!} - \frac{64\,m^{12}}{12!} + \cdots$$

$$0 = -\frac{4}{4!} + \frac{16\,m^4}{8!} - \frac{64\,m^8}{12!} + \cdots$$

Aus dieser Gleichung berechnet sich der kleinste Wert von m

$$m_1 = 4{,}73 = 1{,}51\,.\,\pi$$

Ein Einsetzen dieses Werthes in Gl. 6) gibt dann m_1 genauer. Für die höheren Werte von m wird e^{-m} so klein, dass man $\frac{2\,i+1}{2}\,\pi$ als ersten Näherungswert für m annehmen kann; die Substitution dieses Wertes in Gl. 6) gibt den genaueren Wert. Man findet auf diesem Wege:

$$m_1 = 1{,}50562\,.\,\pi$$
$$m_2 = 2{,}49975\,.\,\pi$$
$$m_3 = 3{,}50001\,.\,\pi$$
$$\vdots$$
$$m_i = \frac{2i+1}{2}\,.\,\pi = \varepsilon_i\,.\,\pi$$

Auch für zwei freie Enden ist daher der Wert von m oder ε für Röhren derselbe wie bei Stäben von gleichen äusseren Dimensionen. Die Formeln für die Schwingungszahlen bleiben dieselben wie in Fall I:

I. Röhren mit rektangulärem Querschnitt.

$$N = \frac{\varepsilon_i^2\,.\,\pi}{4\sqrt{3}\,.\,l^2} \cdot \sqrt{\frac{E\,.\,g}{s}} \cdot \sqrt{\frac{a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3}{a_1 b_1 - a_2 b_2}}$$

Ia. Röhren mit quadratischem Querschnitt.

$$N = \frac{\varepsilon_i^2\,.\,\pi}{4\sqrt{3}\,.\,l^2} \cdot \sqrt{\frac{E\,g}{s}} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

II. Röhren mit kreisförmigem Querschnitt.

$$N = \frac{\varepsilon_i^2\,\pi}{4\,l^2} \cdot \sqrt{\frac{E\,g}{s}} \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

Der Unterschied von Fall I beruht in der Verschiedenheit der Werte ε_i.

Es mögen hier einige Vergleiche mit der Erfahrung angeführt werden, welche der erwähnten Inaug.-Diss. v. L. Heuser entnommen sind. Zunächst bestätigt sich hier durch experimentelle Untersuchung, dass der Wert von m oder ε bei Röhren derselbe ist wie bei Stäben. Bezüglich der Tonhöhen von cylindrischen Messing-Röhren, die an

beiden Enden frei sind, findet man Angaben pag. 31. Die untersuchten 6 Röhren hatten folgende Dimensionen:

	Länge.	Durchm. d. äuss. Fläche.	Wandstärke.
Röhre I.	1,0045 m	11,2 mm	1,3 mm
» III.	1,002 »	18,4 »	0,9 »
» IV.	1,001 »	25,8 »	1,1 »
» V.	1,000 »	15,0 »	1,0 »
» VI.	1,000 »	15,0 »	2,0 »
» VII.	1,000 »	20,0 »	1,0 »

Nimmt man den Elasticitäts-Coeffizienten von Messing zu 9870, das spez. Gewicht von Messing zu 8,4, ferner $g = 9810$ mm, so gibt die Berechnung nach der oben aufgestellten Formel und die Beobachtung folgende Resultate für die Tonhöhen der Röhren:

		Ton 3.	Ton 4.	Ton 5.
Röhre I.	Beobachtet	244	400	604
	Berechnet	229	378	565
Röhre III.	Beobachtet	416	680	1016
	Berechnet	405	667	996
Röhre IV.	Beobachtet	592	960	1440
	Berechnet	570	942	1411
Röhre V.	Beobachtet	340	560	830
	Berechnet	324	536	800
Röhre VI.	Beobachtet	320	524	776
	Berechnet	304	502	750
Röhre VII.	Beobachtet	463	760	1120
	Berechnet	440	729	1086

Da bezüglich des rechteckigen Querschnitts noch keine experimentellen Untersuchungen vorlagen, so war es für mich von Interesse, auch diesen Fall durch das Experiment zu prüfen. Zu diesem Zwecke stand mir im Marburger physikalischen Institut durch die Güte von Herrn Prof. Dr. Melde eine prismatische Röhre von gezogenem Messing zu Gebote. Dieselbe hatte eine Länge von 756.9 mm. Der rektanguläre Querschnitt hatte im äusseren Rechteck die Seiten $a_1 = 22.94$ mm, $b_1 = 14.65$ mm, im inneren Rechteck die Seiten $a_2 = 20.4$ mm, $b_2 = 11.58$ mm. Ich berücksichtigte bei der experimentellen Untersuchung nur den Fall zweier freien Enden. Zur Unterstützung dienten mir zwei scharf zugeschnittene in den Schwingungsknoten angebrachte Korkkeile, auf welche die Röhre aufgelegt wurde; durch ein am Ende der Röhre aufgekittetes Streichstäbchen brachte ich die Röhre zum Tönen, auch benutzte ich teilweise einen Bassbogen. Ich habe mich mit der Untersuchung der drei ersten Obertöne begnügt und dabei jedesmal die Röhre sowohl auf die hohe als auf die niedrige Kante gestellt. Die Schwingungszahlen bestimmte ich nach einem Appunn'schen Stossapparat, der eine Reihe von 32 Zungen enthielt, deren Schwingungszahlen von 128 anfingen und um je 4 Schwingungen aufsteigend bis zur nächsthöheren Oktave, d. h. bis 256 sich erstreckten. In der festliegenden

Oktave von 128 bis 256 kann man dadurch die Tonhöhen bis auf zwei Schwingungen ziemlich genau bestimmen; in höheren Oktaven vervielfachen sich etwa gemachte Fehler. Die für die drei ersten Obertöne der Röhre erhaltenen sechs Beobachtungsresultate sind in der folgenden Tabelle zusammen mit den zugehörigen nach Formel I berechneten Tonhöhen zusammengestellt. Der Oberton ist gleich dem Grundton (mit 2 Knoten) gerechnet.

A) Niedrige Kante.

	1. Obert.	2. Obert.	3. Obert.
Beobachtet	122	336	650
Berechnet	123	337	662

B) Hohe Kante.

	1. Obert.	2. Obert.	3. Obert.
Beobachtet	174	476	912
Berechnet	171	471	914

Bei den Berechnungen ist der Elasticitäts-Coefficient von Messing zu 9870, das spez. Gewicht von Messing zu 8,4 angenommen.

Um die Constanten A, B, C, D zu bestimmen, addiren wir Gl. 3) und 4); unter Berücksichtigung von Gl. 1) und 2) ergibt sich

$$A \cdot e^m + B \cdot \sin m - A \cdot \cos m = 0$$

$$A(e^m - \cos m) = -B \cdot \sin m$$

woraus unter Beachtung von Gl. 6) u. 7):

$$B = \mp A \cdot e^m$$

$$C = A(1 \mp e^m)$$

$$D = A(1 \pm e^m)$$

Demnach wird die Gleichung der Curve, in welcher die Röhre schwingt:

$$u = A\left\{e^{\frac{m}{l}x} \mp e^m \cdot e^{-\frac{m}{l}x} + (1 \mp e^m)\sin\frac{m}{l}x + (1 \pm e^m)\cos\frac{m}{l}x\right\}$$

Um die Gestalt der Curve etwas näher kennen zu lernen, wollen wir den Anfangspunkt der X-Axe in die Mitte der Röhre $\left(x = \frac{l}{2}\right)$ legen. In Bezug auf diesen Punkt als Coordinaten-Anfangspunkt lautet die transformirte Gleichung der Curve mit Weglassung des constanten Faktors:

$$u = e^{\frac{m}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)} \mp e^m \cdot e^{-\frac{m}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)} + (1 \mp e^m)\sin\frac{m}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right) + (1 \pm e^m)\cdot\cos\frac{m}{l}\left(x+\frac{l}{2}\right)$$

$$u = e^{\frac{m}{2}} \cdot e^{\frac{m}{l}x} \pm e^{\frac{m}{2}} \cdot e^{-\frac{m}{l}x} + (1 \mp e^m)\left(\sin\frac{m}{2} \cdot \cos\frac{m}{l}x + \cos\frac{m}{2} \cdot \sin\frac{m}{l}x\right)$$

$$+ (1 \mp e^m)\left(\cos\frac{m}{2} \cdot \cos\frac{m}{l}x - \sin\frac{m}{2} \cdot \sin\frac{m}{l}x\right)$$

$$= \left[(1 \mp e^m) \cdot \sin\frac{m}{2} + (1 \pm e^m) \cdot \cos\frac{m}{2}\right] \cos\frac{m}{l}x + e^{\frac{m}{2}}\left(e^{\frac{m}{l}x} \pm e^{-\frac{m}{l}x}\right)$$

$$+ \left[(1 \mp e^m)\cos\frac{m}{2} - (1 \pm e^m)\sin\frac{m}{2}\right] \sin\frac{m}{l}x$$

Die oberen Zeichen gelten für die ungeraden Werte von m, die unteren für die geraden. Für die ungeraden Werte von m ist aber

$$e^m = \frac{1 - \sin m}{\cos m}$$

welcher Wert aus Gl. 7) folgt.

Also

$$1 - e^m = \frac{\cos m - 1 + \sin m}{\cos m}$$

$$1 + e^m = \frac{\cos m + 1 - \sin m}{\cos m}$$

$$(1 - e^m)\cos\frac{m}{2} - (1 + e^m)\sin\frac{m}{2} =$$

$$\frac{1}{\cos m}\left\{\cos m \cdot \cos\frac{m}{2} - \cos\frac{m}{2} + \cos\frac{m}{2} \cdot \sin m - \cos m \cdot \sin\frac{m}{2} - \sin\frac{m}{2} + \sin\frac{m}{2} \cdot \sin m\right\}$$

$$= \frac{1}{\cos m}\left\{\cos\frac{m}{2} + \sin\frac{m}{2} - \cos\frac{m}{2} - \sin\frac{m}{2}\right\} = 0$$

Es wird daher für ungerade Töne die Gleichung der Schwingungscurve

$$u = e^{\frac{m}{2}}\left(e^{\frac{m}{l}x} + e^{-\frac{m}{l}x}\right) + \frac{2\left(\cos\frac{m}{2} - \sin\frac{m}{2}\right)}{\cos m} \cdot \cos\frac{m}{l}x$$

Da der *cos* bei negativem Winkel sich nicht ändert und in der Klammer des ersten Summanden eine Summe steht, so ist hieraus ersichtlich, dass die Curve vollständig symmetrisch gegen die Mitte liegt, jedem Curvenpunkt auf der einen Seite der Mitte der Röhre entspricht auf der anderen Seite ein Punkt mit derselben Ordinate u und dem gleichgrossen negativen x. Für $x = 0$ wird u nicht Null, d. h. die Mitte der Röhre bildet keinen Knotenpunkt. Sind Knotenpunkte vorhanden, so müssen sie notwendig symmetrisch zur Mitte liegen, sie müssen paarig auftreten.

Für die geraden Werte von m ist

$$e^m = \frac{1 + \sin m}{\cos m}$$

also

$$1 - e^m = \frac{\cos m - 1 - \sin m}{\cos m}$$

$$1 + e^m = \frac{\cos m + 1 + \sin m}{\cos m}$$

Daher wird

$$(1 + e^m) \sin \frac{m}{2} + (1 - e^m) \cos \frac{m}{2} =$$

$$\frac{1}{\cos m} \left\{ \sin \frac{m}{2} \cdot \cos m + \sin \frac{m}{2} + \sin \frac{m}{2} \cdot \sin m + \cos \frac{m}{2} \cdot \cos m - \cos \frac{m}{2} - \cos \frac{m}{2} \cdot \sin m \right\}$$

$$= \frac{1}{\cos m} \left\{ \cos \frac{m}{2} - \sin \frac{m}{2} + \sin \frac{m}{2} - \cos \frac{m}{2} \right\} = 0$$

Die Gleichung der Schwingungscurve wird

$$u = e^{\frac{m}{2}} \left(e^{\frac{m}{l} x} - e^{-\frac{m}{l} x} \right) + \frac{2 \left(\cos \frac{m}{2} + \sin \frac{m}{2} \right)}{\cos m} \cdot \sin \frac{m}{l} x$$

Hier wechselt u mit x das Zeichen, gleichgrossen Werten von x mit entgegengesetztem Vorzeichen entsprechen gleichgrosse Werte von y mit gleichfalls entgegengesetztem Vorzeichen. Die Curve liegt also auch hier symmetrisch in Bezug auf die Mitte. Für $x = 0$ wird $u = 0$, d. h. in der Mitte liegt stets ein Knotenpunkt. Die übrigen Knotenpunkte liegen symmetrisch zu beiden Seiten der Mitte. Es ergibt sich also hieraus, dass bei allen ungeraden Tönen eine gerade Anzahl von Knoten auftreten, die symmetrisch zur Mitte liegen, bei allen geraden Tönen eine ungerade Anzahl von Knoten, von denen einer in der Mitte der Röhre sich befindet, während die übrigen symmetrisch zu derselben liegen.

Zur Berechnung der Knotenlagen dient genau dasselbe Verfahren wie in Fall I, da die Gleichung der Curve dieselbe ist wie dort; der Unterschied beruht nur darin, dass in dem vorliegenden Falle m andere Werte erhält. Führt man also die Rechnung genau so wie früher durch, so erhält man für die Entfernung der Knoten vom freien Ende, wenn man l als Einheit nimmt:

	1. Knoten	2. Knoten	k. Knoten
1. Ton	0,2242		
2. Ton	0,1321	0,500	
3. Ton	0,0944	0,3558	
i. Ton	$\frac{1,3222}{4i+2}$	$\frac{4,9820}{4i+2}$	$\frac{4k-3}{4i+2}$

Die Entfernungen brauchen wegen der symmetrischen Lage der Knoten zur Mitte nur für die Hälfte der Röhre berechnet zu werden, wie es in obiger Tabelle angegeben ist.

Ebenso lassen sich leicht die Wendepunkte, Bäuche und die Punkte stärkster Krümmung berechnen. Die Wendepunkte fallen sehr nahe an die Knoten, die Punkte stärkster Krümmung sehr nahe an die Schwingungsbäuche.

III. Fall.

Beide Enden fest.

Die Bedingungen für diesen Fall lauten: An beiden Enden $x = 0$ und $x = l$ muss u und $\frac{du}{dx}$ verschwinden. Daher ergibt sich

$$0 = A + B + D$$
$$0 = A - B + C$$
$$0 = A \cdot e^m + B \cdot e^{-m} + C \cdot \sin m + D \cdot \cos m$$
$$0 = A \cdot e^m - B \cdot e^{-m} + C \cdot \cos m - D \cdot \sin m$$

woraus die Determinantengleichung folgt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ e^m & e^{-m} & \sin m & \cos m \\ e^m & -e^{-m} & \cos m & -\sin m \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\cos m \cdot (e^m + e^{-m}) = 2$$

Diese Gleichung ist dieselbe, welche zur Bestimmung von m bei zwei freien Enden diente, daher m in diesem Falle denselben Wert hat wie in Fall II. Eine weitere Folge hieraus ist, dass sich dieselbe Tonreihe ergeben muss, wie für den Fall zweier freien Enden. Die Constanten bestimmen sich wie folgt:

$$B = \mp e^m \cdot A$$
$$C = -(1 \mp e^m) A$$
$$D = -(1 \pm e^m) A$$

Daher wird die Gleichung für die Curve:

$$u = A \cdot \left\{ e^{\frac{m}{l}x} \pm e^m \cdot e^{-\frac{m}{l}x} - (1 \mp e^m) \sin \frac{m}{l} x - (1 \pm e^m) \cos \frac{m}{l} x \right\}$$

Die Gestalt der Curve ist nicht verschieden von der, welche bei Annahme zweier freien Enden erhalten wird.

Setzt man zur Bestimmung der Knoten $u = 0$, so erhält man dieselbe Gleichung wie in Fall II bei Bestimmung der Wendepunkte. Die Wendepunkte bei zwei freien Enden fallen also mit den Knoten bei zwei festen Enden zusammen, da m in beiden Fällen denselben Wert hat; ebenso fallen die Knoten bei zwei freien Enden mit den Wendepunkten bei zwei festen Enden zusammen. Endlich ergibt sich noch dieselbe Wechselbeziehung zwischen Bäuchen und Stellen stärkster Biegung, so dass überhaupt folgende Beziehungen stattfinden zwischen Röhren, die an beiden Enden frei und solchen, die an beiden Enden fest sind:

Die Knoten, Wendepunkte, Bäuche, Stellen stärkster Biegung in dem einen Falle fallen zusammen mit den Wendepunkten, Knoten, Stellen stärkster Biegung, Bäuchen in dem anderen Falle.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung dieser drei Hauptfälle, da die übrigen, welche noch erwähnt werden können, von geringerer Wichtigkeit sind. Es sind dies noch die Fälle, wo

IV. Ein Ende angestemmt, das andere frei
V. Ein Ende angestemmt, das andere fest
VI. Beide Enden angestemmt,

die nach derselben Weise behandelt werden können, wie die vorherigen Fälle, wobei sich einfache Resultate ergeben.

Bevor wir eine weitere Untersuchung anstellen, wollen wir eine kurze Recapitulation des Vorhergehenden vornehmen. Es hat sich ergeben:

1) Bei Röhren von überall gleichem Querschnitt ist der Wert von ε derselbe wie bei Stäben; damit im Zusammenhange
2) Die Knoten bei schwingenden Röhren liegen an derselben Stelle wie bei Stäben von gleichen äusseren Dimensionen.
3) Die Tonhöhen der Röhren mit rektangulärem und kreisförmigem Querschnitt bestimmen sich nach der Formel

$$\alpha)\ N = \frac{\varepsilon_i^2\,\pi}{4\sqrt{3}\,.\,l^2} \cdot \sqrt{\frac{Eg}{s}} \cdot \sqrt{\frac{a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3}{a_1 b_1 - a_2 b_2}} \quad \left.\right\} \text{Rektang. Querschnitt.}$$

$$\beta)\ N = \frac{\varepsilon_i^2\,\pi}{4\sqrt{3}\,.\,l^2} \cdot \sqrt{\frac{Eg}{s}} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad \left.\right\} \text{Quadr. Querschnitt.}$$

$$\gamma)\ N = \frac{\varepsilon_i^2\,\pi}{4\,l^2} \cdot \sqrt{\frac{Eg}{s}} \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad \left.\right\} \text{Kreisfg. Querschnitt.}$$

ε_i hat hier für die verschiedenen Obertöne verschiedene Werte, stimmt aber mit dem betreffenden Wert für massive Stäbe vollständig überein. Aus der Formel α) ersieht man, dass die Tonhöhe nicht nur von der Höhe *(b)* das Querschnitts, sondern auch von der Breite *(a)* abhängt, während bei massiven Stäben die Tonhöhe von der Breite unabhängig ist (Fig. 4). Wollen wir untersuchen, wie die Tonhöhe von der Wandstärke abhängt, so schreiben wir in Formel α) den zweiten Radicanden folgendermassen

$$\frac{a_1 b_1^3}{a_1 b_1 - a_2 b_2} - \frac{a_2 b_2^3}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$$

Wird b_2 kleiner, d. h. die Wandstärke in der Richtung der Höhe vergrössert, so wird das erste Glied dieses Ausdrucks kleiner, das zweite Glied wird ebenfalls kleiner, da der Zähler kleiner, der Nenner grösser wird. Daher wird der ganze Radicand kleiner mit b_2, d. h. mit Vergrösserung der Wandstärke in der Richtung der Höhe wird der Ton tiefer. Eine gleiche Überlegung zeigt, dass, wenn a_2 kleiner wird, N ebenfalls kleiner wird, so dass auch bei Vergrösserung der Wandstärke in der Richtung der Breite eine Vertiefung des Tones eintritt. Aus der Formel für den quadratischen Querschnitt ist

nicht ohne Weiteres abzusehen, dass der Ton sich erniedrigt bei Vergrösserung der Wandstärke in der Richtung der Breite, denn wenn in Formel β) b_2 kleiner wird, so wird zwar N kleiner, es könnte indess gezweifelt werden, ob auf diese Erniedrigung die Veränderung in der Breite einen Einfluss gehabt hat. Lassen wir nun bei einem quadratischen Querschnitt die Breite b_2 der inneren Fläche allein abnehmen, während die Höhe b_2 ungeändert bleibt, so wird, wenn die veränderte Breite mit a_2 bezeichnet wird, die Tonhöhe der Röhre nunmehr dargestellt durch

$$N' = C \cdot \sqrt{\frac{b_1^4 - a_2 b_2^3}{b_1^2 - a_2 b_2}}$$

welcher Ausdruck kleiner ist als $C \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, wie in derselben Weise nachgewiesen wird, wie vorhin. Wird auch $b_2 = a_2$, so wird die Formel

$$N'' = C \cdot \sqrt{b_2^2 + a_2^2} \text{ und es ist}$$
$$N' < N' < N$$

Für den kreisförmigen Querschnitt ist die diesbezügliche Untersuchung einfach und das Resultat augenscheinlich. Es kann daher als allgemeiner Satz ausgesprochen werden, dass eine Vergrösserung der Wandstärke stets eine Erniedrigung der Tonhöhe nach sich zieht.

Lassen wir in den Formeln α), β), γ) die inneren Dimensionen a_2, b_2, r_2 zu Null werden, d. h. werden die Röhren zu Stäben, so gehen die Formeln über in

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot b_1 \cdot \sqrt{\frac{Eg}{s}} \Big\} \text{ für den rekt. Querschn.}$$

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi}{4 l^2} \cdot r_1 \cdot \sqrt{\frac{Eg}{s}} \Big\} \text{ für den kreisfg. Querschn.}$$

ein Resultat, welches mit der bekannten Formel für die Tonhöhe der Stäbe völlig übereinstimmt.

Tonhöhen von Röhren, die mit Flüssigkeit gefüllt sind.

Wir nehmen bei dieser Untersuchung keine Rücksicht auf die Viscosität der Flüssigkeit, dieselbe wird als sehr gering vorausgesetzt. Um zu einer Betrachtung dieses Falles zu gelangen, müssen wir zu unseren Fundamentalgleichungen zurückkehren. Durch die Anwesenheit der eingefüllten Flüssigkeit werden die der Biegung sich widersetzenden elastischen Kräfte nicht geändert, das elastische Moment bleibt ungeändert, daher auch der Ausdruck für V keinerlei Änderung erfährt. Hingegen wird die kinetische Energie der Bewegung eine abweichende, und zwar wird für jeden Querschnitt $q \cdot dx$ die kinetische Energie

$$dT = \frac{1}{2}(\varrho \cdot q + \varrho' q') \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \cdot dx$$

wo q den äusseren, q' den inneren Querschnitt, ϱ' die Dichte der eingefüllten Flüssigkeit bedeutet. Demnach wird

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l (\varrho q + \varrho' q') \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dx$$

$$\delta T = \int_0^l (\varrho q + \varrho' q') \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \delta y \cdot dx$$

Es wird infolge dessen die Bewegungsgleichung

$$E \cdot K \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} + (\varrho q + \varrho' q') \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

Setzen wir $\frac{EK}{\varrho q + \varrho' q'} = b^2$, so wird

$$b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

Unter Annahme harmonischer Schwingungen setzen wir

$$y = u \cdot \sin\left(\frac{b}{l^2} m^2 t\right)$$

wodurch wir als Bewegungsgleichung erhalten

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{m^4}{l^4} \cdot u$$

Dieselbe Gleichung haben wir bei leeren Röhren gefunden. Der Wert von b kommt in der Gleichung nicht vor, daher ist der daraus zu bestimmende Wert von m und ε derselbe wie bei leeren Röhren, die Knoten liegen an derselben Stelle, und man übersieht überhaupt leicht, dass alle Verhältnisse ungeändert bleiben mit Ausnahme der Schwingungsdauer, bei deren Bestimmung die Grösse b allein vorkommt. Man ist also zu dem Satze

berechtigt, dass durch das Füllen einer Röhre mit einer Flüssigkeit ein neues elastisches System entsteht, welches dieselben Gesetze befolgt, wie Röhren oder Stäbe.

Die Schwingungsdauer des geänderten Systems bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{b}{l^2} \cdot m^2 \cdot t = 2\pi \cdot N \cdot t$$

woraus

$$N = \frac{b}{l^2} \cdot \frac{m^2}{2\pi}$$

oder, indem wir den Wert für b einführen, ferner für K, q und q' die verschiedenen Werte je nach den Querschnittsformen, endlich $m = \varepsilon \cdot \pi$ setzen,
für den rektangulären Querschnitt

$$N = \frac{\varepsilon^2 \cdot \pi}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E(a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3)}{\varrho(a_1 b_1 - a_2 b_2) + \varrho' a_2 b_2}}$$

Setzen wir das spez. Gewicht der Röhre $= s$, das der Flüssigkeit $= s'$, so dass $\varrho = \frac{s}{g}$, $\varrho' = \frac{s'}{g}$, so wird

$$\alpha)\ N = \frac{\varepsilon^2 \pi}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{Eg} \cdot \sqrt{\frac{a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3}{s(a_1 b_1 - a_2 b_2) + s' a_2 b_2}} \quad \text{Rektang. Querschnitt.}$$

$$\beta)\ N = \frac{\varepsilon^2 \pi}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{Eg} \cdot \sqrt{\frac{b_1^4 - b_2^4}{s(b_1^2 - b_2^2) + s' b_2^2}} \quad \text{Quadr. Querschnitt.}$$

$$\gamma)\ N = \frac{\varepsilon^2 \pi}{4 l^2} \cdot \sqrt{Eg} \cdot \sqrt{\frac{r_1^4 - r_2^4}{s(r_1^2 - r_2^2) + s' r_2^2}} \quad \text{Kreisfg. Querschnitt.}$$

Es ist aus diesen Formeln sofort ersichtlich, dass, da die hinzutretende Grösse als Summand im Nenner auftritt, durch die Flüssigkeit der Ton der Röhre bedeutend vertieft wird und zwar um so mehr, je grösser das spez. Gewicht der angewandten Flüssigkeit ist. Für cylindrische Röhren liegen experimentelle Untersuchungen vor in der erwähnten Arbeit von Heuser, pag. 33. Die dort benutzte Röhre III mit den Dimensionen

$$l = 1{,}002\,\text{m},\ r_1 = 0{,}0092\,\text{m},\ r_2 = 0{,}0083\,\text{m}$$

ergab leer für die Töne 3, 4, 5 die Tonhöhen

416, 680, 1016.

Unter Annahme des spez. Gewichts von Wasser zu 1,00, von Leinöl zu 0,94, von Alkohol zu 0,79 sind die Tonhöhen der gefüllten Röhren nach obiger Formel berechnet und in folgender Tabelle mit den beobachteten Schwingungszahlen (cf. l. c. p. 32) zusammengestellt.

		N_3	N_4	N_5
Mit Alkohol gefüllt	Beobachtet	356	582	860
	Berechnet	340	561	838
Mit Leinöl gefüllt	Beobachtet	352	572	848
	Berechnet	331	546	816
Mit Wasser gefüllt	Beobachtet	344	568	840
	Berechnet	327	541	807

Um auch für den Fall des rektangulären Querschnitts eine experimentelle Bestätigung zu haben, füllte ich die benutzte prismatische Messingröhre der Reihe nach mit Wasser, Alkohol und Leinöl und prüfte sodann die Röhre auf ihre Tonhöhen hin, nachdem ich sie beiderseits mit dünnen Korkplättchen verschlossen hatte. In der folgenden Tabelle sind die beobachteten und die nach der aufgestellten Formel berechneten Schwingungszahlen zusammengestellt. Bezüglich der Dimensionen der Röhre cf. pag. 19.

A) Niedrige Kante.

		N_1	N_2	N_3
Mit Alkohol gefüllt	Beobachtet	112	304	594
	Berechnet	111	306	600
Mit Leinöl gefüllt	Beobachtet	112	300	592
	Berechnet	109	301	590
Mit Wasser gefüllt	Beobachtet	110	296	576
	Berechnet	109	299	586

B) Hohe Kante.

		N_1	N_2	N_3
Mit Alkohol gefüllt	Beobachtet	162	436	844
	Berechnet	155	427	837
Mit Leinöl gefüllt	Beobachtet	160	432	840
	Berechnet	152	420	823
Mit Wasser gefüllt	Beobachtet	160	428	832
	Berechnet	151	417	817

Für den Elasticitäts-Coeffizient von Messing sowie die verschiedenen spez. Gewichte waren die angeführten Werte der Berechnung zu Grunde gelegt.

Tonhöhe von Röhren, welche mit festen Körpern ausgefüllt sind.

Als ein weiteres interessantes Untersuchungsbeispiel mag der Fall betrachtet werden, wo die Höhlung der Röhre durch einen homogenen, festen Körper ausgefüllt ist, welcher selbst Elasticität besitzt, so zwar, dass das Ganze als ein System aufzufassen ist. Es entspricht dies dem Fall, wo die Röhre etwa durch Gips, Wachs oder andere Substanzen ausgegossen ist.

Da wir einen homogenen Körper voraussetzen, so fällt die Schwerpunktslinie des inneren Prismas mit derjenigen der Röhre zusammen und bildet die Axe des Systems. Wir dürfen ferner die Annahme beibehalten, dass durch die Biegung die zusammengesetzten Querschnitte normal zu den Längsfasern bleiben; dann wird, wenn wir auf unsere früheren Betrachtungen zurückgehen, im Vergleich zu den Röhren sowohl die potentielle wie die kinetische Energie geändert, denn es ändern sich 1) die der Biegung sich widersetzenden Kräfte, 2) die bewegte Masse. Was den ersten Punkt anlangt, so wird wie früher (cf. pag. 3) die Verlängerung, welche die Längeneinheit irgend einer Längsfaser des Querschnittselements dq erfährt, dargestellt durch den Ausdruck $\frac{\omega}{R}$, wo ω den Abstand der Längsfaser von der Axe und R den Krümmungsradius der gebogenen Axe in dem betreffenden Punkt bedeutet. Dieser Verlängerung entspricht eine elastische Kraft $E \cdot \frac{\omega}{R} \cdot dq$, welche auf den Querschnitt q ein Drehungsmoment $E \cdot \frac{\omega^2}{R} \cdot dq$ ausübt. Nun hat aber E für die Röhre und für das innere Prisma zwei verschiedene Werte E_1 und E_2 nach den verschiedenen Substanzen, welche angewandt werden, daher bezieht sich $E_1 \cdot \frac{\omega^2}{R} dq$ auf ein Querschnittselement der Röhre und $E_2 \cdot \frac{\omega^2}{R} dq$ auf ein Querschnittselement des inneren Prismas. Das Gesammt-Drehungsmoment, welches auf den Querschnitt q ausgeübt wird, wird also dargestellt durch

$$\int E_1 \frac{\omega^2}{R} dq + \int E_2 \frac{\omega^2}{R} dq$$

wobei sich im ersten Summanden die Integration auf den Querschnitt der Röhre, im zweiten auf den Querschnitt des inneren Prismas zu erstrecken hat. Setzen wir

für den Querschnitt der Röhre $\int \omega^2 dq = K_1$

und „ „ „ des Prismas $\int \omega^2 dq = K_2$

so wird das Gesammt-Drehungsmoment

$$\frac{E_1}{R} \cdot K_1 + \frac{E_2}{R} \cdot K_2 = (E_1 K_1 + E_2 K_2) \frac{1}{R}$$

Daher wird (cf. pag. 5)

$$V = \frac{1}{2}(E_1 K_1 + E_2 K_2) \int_0^l \left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2 d x$$

Ferner wird die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l (\varrho q + \varrho' q') \left(\frac{d y}{d t}\right)^2 d x$$

wo ϱ und q, ϱ' und q' bzw. die Dichten und den Querschnitt für die Röhre und das innere Prisma darstellen. Unter Anwendung derselben Betrachtung, welche wir für Röhren angestellt haben und welche wir daher hier nicht wiederholen wollen, gelangt man zu der Bewegungsgleichung

$$(E_1 K_1 + E_2 K_2) \frac{d^4 y}{d x^4} + (\varrho q + \varrho' q') \frac{d^2 y}{d t^2} = 0$$

Setzt man

$$\frac{E_1 K_1 + E_2 K_2}{\varrho q + \varrho' q'} = b^2$$

so wird die Bewegungsgleichung

$$b^2 \cdot \frac{d^4 y}{d x^4} + \frac{d^2 y}{d t^2} = 0$$

und wenn wir unter Annahme harmonischer Schwingungen setzen

$$y = u \cdot \sin\left(\frac{b}{l^2} m^2 t\right)$$

so folgt

$$\frac{d^4 u}{d x^4} = \frac{m^4}{l^4} \cdot u$$

welche Gleichung dieselbe ist, die wir auch bei Röhren erhalten haben. Es folgt hieraus, dass der Wert von ε und m derselbe ist, wie bei Röhren und Stäben und man ist zu dem Schluss berechtigt, dass das neue elastische System dieselben Schwingungsgesetze befolge wie Röhren und Stäbe. Die Lage der Knoten, Bäuche etc. bleibt ungeändert, es ändert sich nur die Schwingungsdauer. Um diese zu finden, haben wir zunächst die Werte von E_1, E_2, K_1, K_2 zu bestimmen. E_1 und E_2 können aus Tabellen gefunden oder auf experimentellem Wege bestimmt werden, der Wert von K_1 war schon früher gefunden und zwar

1) für den rekt. Röhren-Qu. $K_1 = \frac{a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3}{12}$

2) „ „ kreisfg. „ „ $K_1 = \frac{r_1^4 - r_2^4}{4} \cdot \pi$

Für das innere Prisma resp. den inneren Cylinder findet sich leicht

1) für den rekt. Querschn. $K_2 = \frac{a_2 b_2^3}{12}$

2) „ „ kreisfg. „ $K_2 = \frac{r_2^4}{4} \cdot \pi$

Hiernach wird

1) für rektang. Querschnitt $E_1 K_1 + E_2 K_2 = \frac{1}{12}\left\{E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3) + E_2 a_2 b_2^3\right\}$

$$= \frac{1}{12}\left\{ E_1 a_1 b_1^3 - (E_1 - E_2) a_2 b_2^3 \right\}$$

2) für kreisfg. Querschnitt $E_1 K_1 + E_2 K_2 = \frac{\pi}{4}\left\{E_1 (r_1^4 - r_2^4) + E_2 r_2^4\right\}$

$$= \frac{\pi}{4}\left\{E_1 r_1^4 - (E_1 - E_2) r_2^4\right\}$$

Die Schwingungszahl wird gefunden durch die Gleichung

$$\frac{b}{l^2} m^2 = 2\pi \cdot N$$

woraus nach Einsetzen des Wertes von b

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi}{2 l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_1 K_1 + E_2 K_2}{\varrho q + \varrho' q'}}$$

Für den rekt. Querschn. ist $q = a_1 b_1 - a_2 b_2$; $q' = a_2 b_2$

„ „ kreisfg. „ „ $q = (r_1^2 - r_2^2)\pi$; $q' = r_2^2 \pi$

ferner ist $\varrho = \frac{s}{g}$, $\varrho' = \frac{s'}{g}$

Daher wird

1) $N = \frac{\varepsilon^2 \pi \cdot \sqrt{g}}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3) + E_2 a_2 b_2^3}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2) + s' a_2 b_2}}$

$= \frac{\varepsilon^2 \pi \cdot \sqrt{g}}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_1 a_1 b_1^3 - (E_1 - E_2) a_2 b_2^3}{s a_1 b_1 - (s - s') a_2 b_2}}$ **Rektang. Querschnitt.**

2) $N = \frac{\varepsilon^2 \pi \cdot \sqrt{g}}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_1 (b_1^4 - b_2^4) + E_2 b_2^4}{s (b_1^2 - b_2^2) + s' b_2^2}}$

$= \frac{\varepsilon^2 \pi \cdot \sqrt{g}}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_1 b_1^4 - (E_1 - E_2) b_2^4}{s b_1^2 - (s - s') b_2^2}}$ **Quadr. Querschnitt.**

3) $N = \frac{\varepsilon^2 \pi \cdot \sqrt{g}}{4 l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_1 (r_1^4 - r_2^4) + E_2 r_2^4}{s (r_1^2 - r_2^2) + s' r_1^2}}$

$= \frac{\varepsilon^2 \pi \cdot \sqrt{g}}{4 l^2} \sqrt{\frac{E_1 r_1^4 - (E_1 - E_2) r_2^4}{s r_1^2 - (s - s') r_2^2}}$ **Kreisfg. Querschnitt.**

Ist die Höhlung mit demselben Material ausgefüllt, aus welchem die Röhre selbst besteht, so erhalten wir einen massiven homogenen Stab von den äusseren Dimensionen der Röhre, dessen Tonhöhe bzw. dargestellt wird durch die Formel

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi \cdot b_1}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_1 g}{s}}$$

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi \cdot r_1}{4 l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_1 g}{s}}$$

Dasselbe Resultat müssen wir erhalten, wenn wir in Formel 1) und 2) $E_1 = E_2$, $s = s'$ setzen. In der That wird dann

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi \sqrt{g}}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_1 a_1 b_1^3}{s \cdot a_1 b_1}}$$
$$= \frac{\varepsilon^2 \pi}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot b_1 \cdot \sqrt{\frac{E_1 g}{s}}$$

und

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi \sqrt{g}}{4 l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_1 r_1^4}{s r_1^2}}$$
$$= \frac{\varepsilon^2 \pi}{4 l^2} \cdot r_1 \cdot \sqrt{\frac{E_1 g}{s}}$$

Es entsteht nunmehr die Frage, in welcher Weise der Ton der Röhre durch eine derartige Ausfüllung verändert, ob er erhöht oder vertieft wird. Die Tonhöhenformel für die Röhre bei rektangulärem Querschnitt ist

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi}{4\sqrt{3} \cdot l^2} \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{\frac{E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3)}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2)}}$$

Diese unterscheidet sich von der letzthin erhaltenen Formel 1) nur im Radicanden; damit nun

$$\frac{E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3) + E_2 a_2 b_2^3}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2) + s' a_2 b_2} > \frac{E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3)}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2)}$$

sei, ist notwendig, dass

$$E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3) + E_2 a_2 b_2^3 > \frac{E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3) \cdot \left(s (a_1 b_1 - a_2 b_2) + s' a_2 b_2\right)}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2)}$$

oder

$$E_2 > \frac{E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3) s'}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2) \cdot b_2^2}$$

Die Kriterien für die Veränderung der Tonhöhe der Röhre durch Ausfüllen derselben mit einem festen elastischen Körper sind also folgende:

1) Ist $\frac{E_2}{s'} > \frac{E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3)}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2) \cdot b_2^2}$

so wird der Ton erhöht.

2) Ist $\frac{E_2}{s'} = \frac{E_1 (a_1 b_1^3 - a_1 b_2^3)}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2) \cdot b_2^2}$

so bleibt die Tonhöhe ungeändert.

3) Ist $\frac{E_2}{s'} < \frac{E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3)}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2) \cdot b_2^2}$

so wird der Ton erniedrigt.

In der That, setzen wir nach Gl. 2)

$$\frac{E_2}{s'} = \frac{E_1 (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3)}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2) \cdot b_2^2}$$

in Formel 1) pag. 31 ein, so wird der Radicand

$$\frac{E_1}{s} \cdot \frac{s (a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3) + a_2 b_2 \cdot s' \left(\frac{a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3}{a_1 b_1 - a_2 b_2} \right)}{s (a_1 b_1 - a_2 b_2) + s' a_2 b_2}$$
$$= \frac{E_1}{s} \cdot \frac{a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$$

welcher Ausdruck als Radicand in der Formel für die Röhre auftritt.

Für den quadratischen Querschnitt gestalten sich diese Bedingungen noch etwas einfacher:

1) $\frac{E_2}{s'} > \frac{E_1}{s} \left(1 + \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 \right)$ **Tonerhöhung.**

2) $= \frac{E_1}{s} \left(1 + \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 \right)$ **Gleichbleiben des Tones.**

3) $< \frac{E_1}{s} \left(1 + \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 \right)$ **Tonerniedrigung.**

Endlich für den kreisförmigen Querschnitt:

1) $\frac{E_2}{s'} > \frac{E_1}{s} \left(1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right)$ **Tonerhöhung.**

$= \frac{E_1}{s} \left(1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right)$ **Gleichbleiben des Tones.**

$< \frac{E_1}{s} \left(1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right)$ **Tonerniedrigung.**

Eine Tonerhöhung wird z. B. dann eintreten, wenn bei dünnwandigen Röhren zur Ausfüllung eine Substanz verwandt wird, welche gegenüber dem Material der Röhre ein geringeres spez. Gewicht, dagegen einen ungleich höheren Elasticitäts-Coeffizient besitzt, wie etwa Blei und Eisen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Untersuchung über Röhren, welche mit einer Flüssigkeit gefüllt sind, aus der letzten Untersuchung dadurch hätte abgeleitet werden können, dass man $E_2 = 0$ setzte.

Um für den untersuchten Fall experimentelle Prüfungen vornehmen zu können, kommt es zunächst darauf an, die Röhre mit einem Material auszufüllen, dessen Elasticitätsmodul bekannt ist. Ich hatte mir vorgenommen, die Röhre mit Wachs auszugiessen, und da der Elasticitätscoefficient von Wachs nicht bekannt war, so musste ich denselben zunächst auf experimentellem Wege bestimmen. Dazu wandte ich die Methode der Berechnung aus den Transversaltönen eines schwingenden cylindrischen Stabes an. Für einen solchen ist nämlich die Schwingungszahl $N = \frac{\varepsilon^2 \pi}{4 l^2} \cdot r \sqrt{\frac{Eg}{s}}$. Sind die Dimensionen

des Stabes, sowie das spez. Gewicht des Materials bekannt, so lässt sich, falls N ermittelt ist, der Wert für E finden; $E = \frac{16 N^2 l^4 s}{\varepsilon^4 \pi^2 r^2 g}$. Ich verfertigte mir demgemäss einen cylindrischen Wachsstab auf die Weise, dass ich zunächst eine cylindrische Glasröhre mittelst Sprengkohle in vier Längsteile spaltete, deren Auseinanderfallen ich dadurch verhütete, dass ich die Röhre an mehreren Stellen mit Draht fest umwickelte*). Nach der Spaltung wurde die Röhre mit Wachs ausgegossen, und nach dem Erkalten die vier Längsteile der Röhre abgelöst. Hierdurch erhielt ich einen recht regelmässigen cylindrischen Wachsstab; die Länge desselben betrug 637 mm, sein Radius 8,8 mm. Für den ersten Oberton fand ich die Schwingungszahl 72 und berechnete daraus den Elasticitätscoeffizient von Wachs zu 340. Das spez. Gewicht von Wachs war zu 0.96 angenommen. Mit dem so berechneten Elasticitätsmodul ging ich sodann an die Prüfung der Tonhöhen von Röhren, welche mit Wachs ausgegossen sind. Hierzu benutzte ich zunächst eine cylindrische Messingröhre von der Länge 1002 mm und den beiden Radien 9.1 mm und 8.3 mm. Die mit Wachs ausgegossene Röhre ergab folgende Tonhöhen:

	1. Obert.	2. Obert.
Beobachtet	66	180
Berechnet	61	169

Ich goss sodann die benutzte rektanguläre Röhre ebenfalls mit Wachs aus, und fand darauf für die Schwingszahlen der drei ersten Obertöne folgende Werte:

A) Niedrige Kante.

	1. Obert.	2. Obert.	3. Obert.
Beobachtet	116	312	604
Berechnet	110	303	594

B) Hohe Kante.

	1. Obert.	2. Obert.	3. Obert.
Beobachtet	164	448	848
Berechnet	154	425	833

Die zu der vorstehenden Arbeit erforderlichen experimentellen Untersuchungen wurden ausgeführt im Marburger physikalischen Institut. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Dr. Melde auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen für das freundliche Entgegenkommen und die Güte, mit welcher er mir die Benutzung des genannten Instituts gestattete, wie insbesondere auch für mannigfache Anregungen, die mein Interesse an der Physik wesentlich erhöht und gefördert haben.

*) cf. Melde, Akustik, pag. 147.

Fig. I.

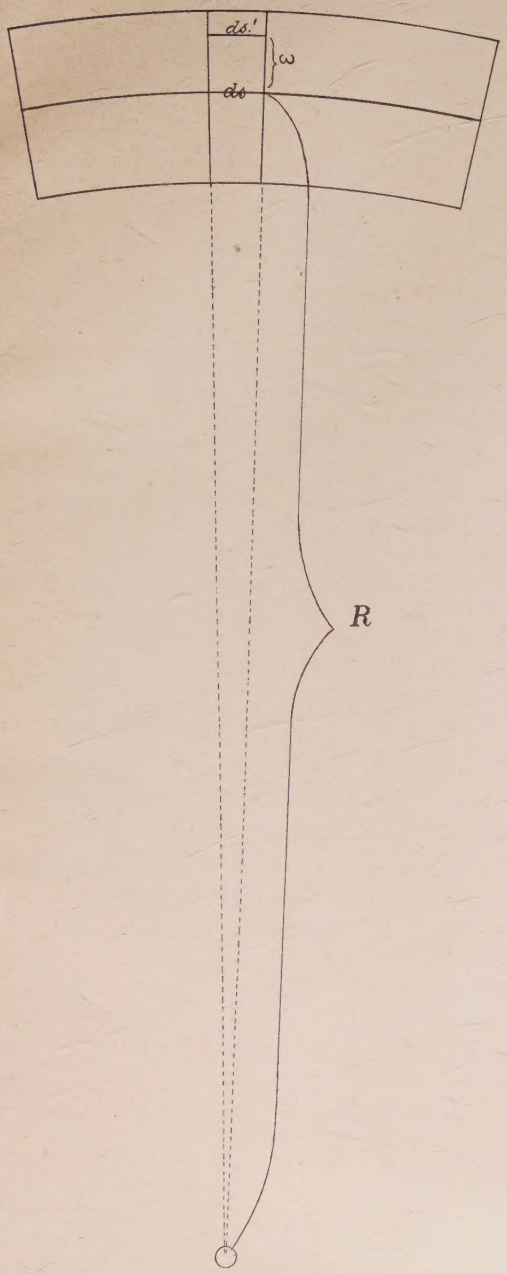


Fig. II.

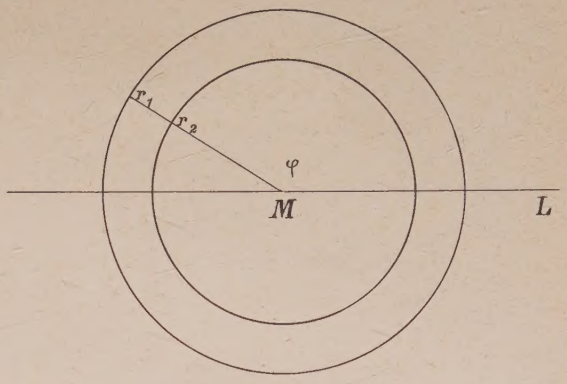


Fig. III.

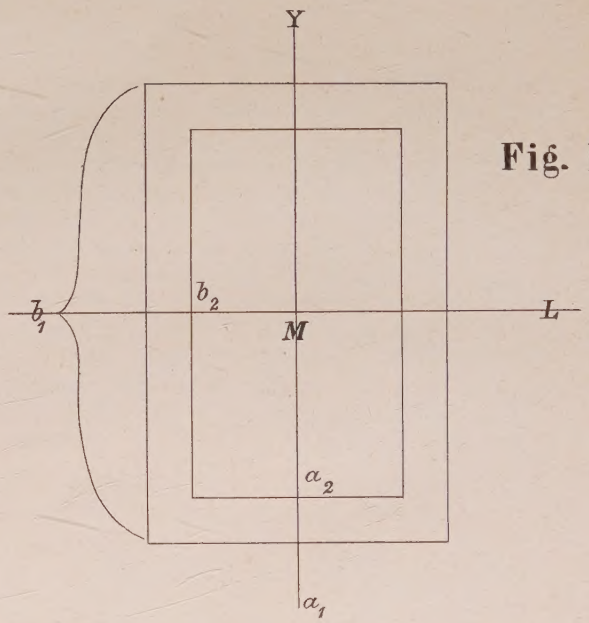
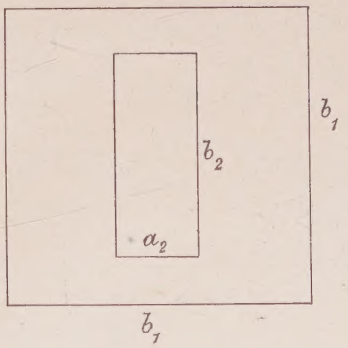


Fig. IV.



VITA.

Geboren wurde ich Joh. Georg Heinrich Wilhelm Elsässer am 28. Februar 1863 zu Lennep in der Rheinprovinz als Sohn des evang. Volksschullehrers Wilh. Elsässer und seiner Ehefrau Ida, geb. Bohnstedt. Meine Vorbildung erhielt ich vom 9. bis 16. Jahre auf der höh. Bürgerschule meines Geburtsortes, nach deren Absolvirung Ostern 1879 ich die Prima der Realschule I. O. zu Barmen 2 Jahre lang besuchte. Von letztgenannter Anstalt zu Ostern 1881 mit dem Zeugnis der Reife entlassen, wandte ich mich dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften zu und hörte Vorlesungen auf den Universitäten zu Bonn, Berlin und Marburg. In Bonn war ich Mitglied des zoolog. Seminars bei Herrn Prof. Troschel, in Marburg Mitglied des mathem. Seminars bei Herrn Prof. Weber, ausserdem arbeitete ich an letzterer Universität drei Semester im physikalischen Institut. Das mündliche Staats-Examen legte ich in Marburg am 29. Januar d. J., das Examen rigor. ebendaselbst am 16. April ab. Meine Lehrer waren während der Studienzeit die Herren Proff. Lipschitz, Clausius, Troschel, Schaarschmidt, Kummer, Hettner, Tobler, Paulsen, Melde, Hess, Weber, Feussner, Wigand, Greeff. Ihnen Allen bin ich für die durch sie erhaltene wissenschaftliche Förderung zu grossem Danke verpflichtet.